

1.1 Γ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Τετραγωνική ρίζα

Ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού x και συμβολίζουμε με $\sqrt{x}$ το θετικό αριθμό που αν τον υψώσουμε στο τετράγωνο μας δίνει τον x .

Δηλαδή όταν $x > 0$ τότε $(\sqrt{x})^2 = x$

Ακόμα ορίζουμε ότι $\sqrt{0} = 0$

2.

Σημαντική ιδιότητα

Για κάθε πραγματικό αριθμό x , ισχύει η ισότητα $\sqrt{x^2} = |x|$

3.

Ιδιότητες : Αν a, β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta}$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}, \quad \beta > 0$$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Κάτι που δεν πρέπει να ξεχνάμε : Το σύμβολο $\sqrt{x}$ έχει νόημα μόνο για $x \geq 0$
Τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται.

2.

Προσοχή : $\sqrt{a} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{a + \beta}$

3.

Ρητοποίηση κλάσματος : Το κλάσμα $\frac{a}{\sqrt{\beta}}$ μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο με

ρητό παρονομαστή αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους του με τον παρονομαστή δηλαδή

$$\frac{a}{\sqrt{\beta}} = \frac{a\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\beta}} = \frac{a\sqrt{\beta}}{(\sqrt{\beta})^2} = \frac{a\sqrt{\beta}}{\beta}$$

4.

Η συζυγής παράσταση : Για τις παραστάσεις $a + \sqrt{b}$ και $a - \sqrt{b}$ λέμε ότι η μία είναι συζυγής της άλλης .

Το ίδιο και για τις παραστάσεις

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ και } \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Το γινόμενο δύο συζυγών παραστάσεων είναι ρητός

5.

Κλάσμα με παρονομαστή $a \pm \sqrt{b}$ ή $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Ρητοποιείται αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους του με τον συζυγή του παρονομαστή

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων

α) $3\sqrt{4} - 2\sqrt{16} - 7\sqrt{81} + \sqrt{100}$

β) $5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3}$

γ) $6\sqrt{5} + 3\sqrt{11} - 8\sqrt{5} + 4\sqrt{11}$

δ) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 1-2-3

α)

$$3\sqrt{4} - 2\sqrt{16} - 7\sqrt{81} + \sqrt{100} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 - 7 \cdot 9 + 10 = 6 - 8 - 63 + 10 = -55$$

β)

$$5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = (5 - 8 + 12)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

γ)

$$6\sqrt{5} + 3\sqrt{11} - 8\sqrt{5} + 4\sqrt{11} = (6 - 8)\sqrt{5} + (3 + 4)\sqrt{11} = -2\sqrt{5} + 7\sqrt{11}$$

δ)

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{2 \cdot 18} + \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{36} + \sqrt{81} = 6 + 9 = 15$$

2.

Να αποδειχθούν οι ισότητες

$$\alpha) 2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} = 8\sqrt{2}$$

$$\beta) \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{48} = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$$

$$\gamma) 4(\sqrt{7} - \sqrt{5}) + 2(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$$

$$\delta) \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = -7$$

Θεωρία 1-3

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\begin{aligned} 2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} &= 2\sqrt{2 \cdot 4} + 5\sqrt{2 \cdot 36} - 7\sqrt{2 \cdot 9} - \sqrt{2 \cdot 25} = \\ &= 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + 5\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} - 7\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} - 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 5 \cdot \sqrt{2} = \\ &= 4\sqrt{2} + 30\sqrt{2} - 21\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{48} &= \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 9} - \sqrt{3 \cdot 16} = \\ &= \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \\ &= \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

γ)

$$4(\sqrt{7} - \sqrt{5}) + 2(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = 4\sqrt{7} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{7} = 2\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$$

δ)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - (\sqrt{2})^2 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{5})^2 = \\ &= \sqrt{10} - 2 - \sqrt{10} - 5 = -7 \end{aligned}$$

3.

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\alpha) \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27}}{4\sqrt{3} - \sqrt{75}}$$

$$\beta) \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$$

$$\gamma) \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$$

$$\delta) \sqrt{\frac{125}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{5}} + \sqrt{\frac{18}{7}} \cdot \sqrt{\frac{63}{2}}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27}}{4\sqrt{3} - \sqrt{75}} &= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3}}{4\sqrt{3} - \sqrt{25 \cdot 3}} = \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{3} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}} = \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{3} - 5 \cdot \sqrt{3}} = \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1 \end{aligned}$$

Θεωρία 1-3

β)

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} &= \frac{3\sqrt{4 \cdot 2} - 2\sqrt{9 \cdot 2} + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \\ &= \frac{3\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \\ &= \frac{6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

γ)

$$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{60}{15}} - \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{4} - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1$$

δ)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{125}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{5}} + \sqrt{\frac{18}{7}} \cdot \sqrt{\frac{63}{2}} &= \sqrt{\frac{125}{3} \cdot \frac{27}{5}} + \sqrt{\frac{18}{7} \cdot \frac{63}{2}} = \\ &= \sqrt{25 \cdot 9} + \sqrt{9 \cdot 9} = \\ &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = \\ &= 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 15 + 9 = 24 \end{aligned}$$

4.

Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων

$$\alpha) \sqrt{5^2} + \sqrt{(-5)^2} + (\sqrt{5})^2 \quad \beta) 2\sqrt{1,44} - 4\sqrt{2,25} + \sqrt{0,81}$$

$$\gamma) 5\sqrt{2\sqrt{64}} - 2\sqrt{8\sqrt{4}} + 7\sqrt{5\sqrt{25}} \quad \delta) \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\sqrt{5^2} + \sqrt{(-5)^2} + (\sqrt{5})^2 = |5| + |-5| + 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

Θεωρία 1-2-3

β)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1,44} - 4\sqrt{2,25} + \sqrt{0,81} &= 2 \cdot 1,2 - 4 \cdot 1,5 + 0,9 = \\ &= 2,4 - 6 + 0,9 = \\ &= -2,7 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2\sqrt{64}} - 2\sqrt{8\sqrt{4}} + 7\sqrt{5\sqrt{25}} &= 5\sqrt{2 \cdot 8} - 2\sqrt{34+2} + 7\sqrt{86-5} = \\ &= 5\sqrt{16} - 2\sqrt{36} + 7\sqrt{81} = \\ &= 5 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + 7 \cdot 9 = \\ &= 20 - 12 + 63 = 71 \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} &= |2-\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}|^* = \\ &= 2-\sqrt{3} + (-1+\sqrt{3}) = \\ &= 2-\sqrt{3}-1+\sqrt{3} = 1 \end{aligned}$$

$$* \text{ Είναι } 2-\sqrt{3} > 0 \text{ άρα } |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$$

$$\text{και } 1-\sqrt{3} < 0 \text{ άρα } |1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$$

5.

Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4}{\sqrt{8}}$ και το τελικό αποτέλεσμα να το μετατρέψετε σε παράσταση με ρητό παρονομαστή.

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4}{\sqrt{8}} &= \frac{\sqrt{2 \cdot 36} + \sqrt{2 \cdot 16} - 4}{\sqrt{2 \cdot 4}} = \\ &= \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} - 4}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}} = \\ &= \frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4}{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{10\sqrt{2} - 4}{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - \frac{4}{2\sqrt{2}} = 5 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 5 - \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = 5 - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 5 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

Θεωρία 1-3
Σχόλιο 3

6.

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

α) $\sqrt{375} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{405}$ β) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) - (\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2})$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\sqrt{375} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{405} = \sqrt{375 \cdot 48 \cdot 405}$$

Αναλύοντας σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς κάτω από το ριζικό βρίσκουμε ότι $375 = 3 \cdot 5^3$, $48 = 3 \cdot 4^2$, $405 = 5 \cdot 3^4$

$$\begin{aligned}\text{Οπότε } \sqrt{375 \cdot 48 \cdot 405} &= \sqrt{3 \cdot 5^3 \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 3^4} = \\ &= \sqrt{3^6 \cdot 4^2 \cdot 5^4} = \\ &= \sqrt{(3^3 \cdot 4 \cdot 5^2)^2} = \\ &= 3^3 \cdot 4 \cdot 5^2 = 27 \cdot 4 \cdot 25 = 2700\end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) - (\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2}) &= \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 - [\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 1 - \sqrt{2}] = \\ &= 4 - 3 - 2 + 1 = 0\end{aligned}$$

7.

Τα παρακάτω κλάσματα να τα μετατρέψετε σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

$$\alpha) \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad \beta) \frac{3}{5\sqrt{3}} \quad \gamma) \frac{7}{2-\sqrt{3}} \quad \delta) \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha) \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$

Θεωρία 1-3
σχόλιο 3-5

$$\beta) \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\gamma) \frac{7}{2-\sqrt{3}} = \frac{7(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{7(2+\sqrt{3})}{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2} = \frac{7(2+\sqrt{3})}{4-3} = 7(2+\sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \delta) \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{6})^2 + \sqrt{30} + \sqrt{30} + (\sqrt{5})^2}{(\sqrt{6})^2 - \sqrt{30} + \sqrt{30} - (\sqrt{5})^2} = \\ &= \frac{6+2\sqrt{30}+5}{6-5} = 11+2\sqrt{30} \end{aligned}$$

8.

Σε ισόπλευρο τρίγωνο η περίμετρος είναι ίση με $3\sqrt{3}$ cm. Να υπολογίσετε το ύψος του τριγώνου και το εμβαδόν του.

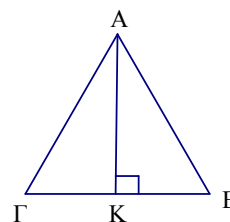
Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι το μήκος της πλευράς του τριγώνου τότε

$$3x = 3\sqrt{3} \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{3}$$

Στο ισόπλευρο τρίγωνο το ύψος είναι και διάμεσος,

$$\text{οπότε} \quad \Gamma\text{K} = \text{KB} = \frac{\text{B}\Gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{Πυθαγόρειο στο τρίγωνο AK}\Gamma \quad \text{AK}^2 = \text{A}\Gamma^2 - \Gamma\text{K}^2 = (\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{Άρα AK} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Το εμβαδόν E του τριγώνου είναι ίσο με} \quad E = \frac{\text{B}\Gamma \cdot \text{AK}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

9.

Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 3cm και 5 cm. Η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με $5\sqrt{34}$ cm

α) Να βρεθεί το μήκος των ίσων πλευρών του τριγώνου

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

α)

Από το Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ

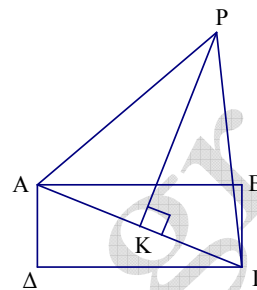
$$\begin{aligned}\text{έχουμε ότι } AG^2 &= AD^2 + DG^2 = \\ &= 3^2 + 5^2 = \\ &= 9 + 25 = 34\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } AG = \sqrt{34}$$

Αν x είναι το μήκος κάθε μιας από τις ίσες πλευρές του τριγώνου, τότε $x + x + \sqrt{34} = 5\sqrt{34}$

$$2x = 4\sqrt{34}$$

$$x = 2\sqrt{34} \text{ cm}$$



β)

Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση είναι και διάμεσος.

$$\text{Άρα } AK = KG = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Από το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο PAK έχουμε $PK^2 = AP^2 - AK^2 =$

$$= (2\sqrt{34})^2 - \left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2 =$$

$$= 4 \cdot 34 - \frac{34}{4} = \frac{255}{2}$$

Το τετράγωνο με πλευρά το ύψος PK έχει εμβαδόν $E = PK^2 = \frac{255}{2} \text{ cm}^2$.